Министерство просвещения ПМР
ГОУ СПО «Рыбницкий политехнический техникум»
ГОУ ДПО «Институт развития образования и повышения квалификации»

Учебное пособие по математике ЕН.01 «Интегральное исчисление» для студентов СПО

Одобрено Ученым советом ГОУ ДПО «ИРОиПК»

Тирасполь
2020

Разработчик – ***Н.А. Томина***, преподаватель математики и физики высшей квалификационной категории ГОУ СПО «РПТ».

Рецензенты:
Т.С. Штырбул, преподаватель математики высшей квалификационной категории ГОУ СПО «РПТ»;
Л.Я. Козак, канд. техн. наук, доцент ПГУ им. Т.Г. Шевченко.

Учебное пособие по математике ЕН.01 по разделу «Интегральное исчисление» предназначено для студентов СПО технических, электротехнических и экономических дисциплин. Целями учебного пособия являются ознакомление студентов с основными понятиями интегрального исчисления, способами интегрирования и некоторыми приложениями интегралов, а также привитие навыков вычисления интегралов.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» занимает одно из центральных мест в учебных планах технических и экономических специальностей, она входит в цикл математических и естественнонаучных дисциплин. Основные требования к содержанию дисциплины определены государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования. Математика играет важную роль в освоении естественнонаучных, инженерно-технических и экономических дисциплин. Математика является не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем, мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, а также элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую в системе фундаментальной подготовки современного специалиста.

Учебное пособие по разделу «Интегральное исчисление» составлено в соответствии с требованиями ГОС нового поколения. Пособие предназначено для студентов средних специальных учебных заведений и содержит все необходимые определения, понятия, теоремы, формулы, примеры и методы решения задач.

Учебное пособие включает теоретический материал по теме, методику нахождения неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования, методом замены переменной, методом интегрирования по частям, свойства и способы вычисления определенного интеграла, решение типовых примеров, задания для самостоятельной работы студентов по теме.

Учебное пособие можно использовать как на занятиях, так и для организации индивидуальной и самостоятельной работы студентов, на дополнительных занятиях и консультациях. В качестве дополнительного материала может быть использовано на факультативных занятиях по математике.

Цели учебного пособия – помочь студентам в освоении материала по разделу «Интегральное исчисление» и получить необходимые практические навыки по применению теоретического материала в условиях конкретного задания. Идея всех методов интегрирования заключается в приведении искомого интеграла к табличному интегралу или сумме табличных интегралов.

Студент, успешно изучающий основы интегрального исчисления, должен знать:

– определения неопределенного и определенного интегралов;
– свойства интегралов;

– различные методы вычисления неопределенных и определенных интегралов;
– геометрические и экономические приложения интегралов.

Исторические сведения

Под ***интегральным исчислением*** понимают раздел математического анализа, изучающий интегралы функций и их приложения.

Зачатки интегрального исчисления можно найти в трудах *Архимеда* (287 г. до н.э. – 212 г. до н.э.): в сочинении «Об измерении длины окружности» рассматривается вопрос об определении площади и длины окружности круга, а в трактате «О шаре и цилиндре» – о поверхностях и объемах некоторых тел. Для решения этих задач Архимед использовал метод исчерпывания Евдокса Книдского (ок. 408 г. до н.э. – ок. 355 г. до н.э.).

Таким образом, интегральное исчисление возникло из потребности создания общего метода нахождения площадей, объемов и центров тяжести.

Систематическое развитие эти методы получают в XVII веке в работах Кавальери (1598–1647 гг.), Торричелли (1608–1647 гг.), П. Ферма (1601–1665 гг.), Б. Паскаля (1623–1662 гг.) и других ученых. Но их изыскания в основном имели разрозненный и утилитарный характер – решались конкретные самостоятельные задачи. В 1659 году И. Барроу (1630–1677 гг.) установил взаимосвязь между задачей о нахождении площади и задачей о нахождении касательной.

Основы классического интегрального исчисления были заложены в работах И. Ньютона (1643–1727 гг.) и Г. Лейбница (1646–1716 гг.), которые в 70-х годах XVII века отвлеклись от упомянутых частных прикладных задач и установили связь между интегральным и дифференциальным исчислениями. Это позволило Ньютону, Лейбницу и их ученикам развить технику интегрирования. Своего нынешнего состояния методы интегрирования в основном достигли в работах Л. Эйлера (1707–1783 гг.). Развитие методов завершили труды М.В. Остроградского (1801–1861 гг.) и П.Л. Чебышёва (1821–1894 гг.).

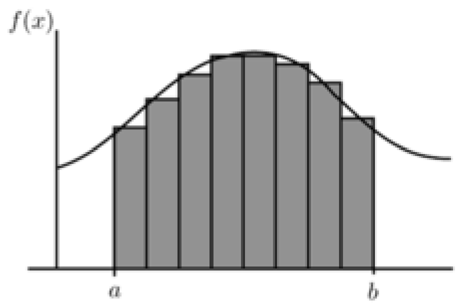


Рис. 1. Геометрическая интерпретация интеграла Римана

Исторически под интегралом понимали площадь криволинейной трапеции, образованной заданной кривой *y=f(x)* и осью координат. Для нахождения этой площади отрезок [a, b] разбивали на n необязательно равных частей и строили ступенчатую фигуру (на рис. 1 она заштрихована). Ее площадь равна

$$F(x) = y_0dx_0 + y_1dx_1 + \ldots + y_{n-1}dx_{n-1} \quad (1.1),$$

где y_i – значение функции $f(x)$ в i-той точке $(i = 0,1,2,\ldots n-1)$, а $dx_i = x_{i+1}-x_i$.

Г. Лейбниц в конце XVII века обозначил предел этой суммы как $\int y dx$ (1.2). На тот момент понятие предела еще не сформировалось, поэтому Лейбниц ввел новый символ для суммы бесконечного числа слагаемых видоизмененную курсивную латинскую «S» ∫ – первую букву лат. *summa* (сумма).

Слово «интеграл» происходит от лат. *integralis* – целостный. Это название было предложено учеником Лейбница Иоганном Бернулли (1667–1748 гг.), чтобы отличить «сумму бесконечного числа слагаемых» от обычной суммы.

В дальнейшем обозначение Лейбница усовершенствовал Ж. Фурье (1768–1830 гг.). Он явно стал указывать начальное и конечное значение x: $\int_a^b \boldsymbol{y dx}$ (1.3), введя тем самым современное обозначение ***определенного интеграла.***

В теории определенных интегралов интегрирование рассматривается как процесс обобщения суммирования на случай бесконечно большего числа бесконечно малых выражений. Таким образом, результатом определенного интегрирования (в случае его возможности) является некое число (в обобщениях, бесконечность).

Неопределенный интеграл есть функция (точнее, семейство функций). Интегрирование, в противоположность дифференцированию, рассматривается как искусство, что связано в первую очередь с малым количеством закономерностей, которым бы удовлетворяли все интегралы. При этом для существования интеграла, по основной теореме интегрального исчисления, необходима лишь непрерывность интегрируемой функции. Факт существования интеграла не дает хоть какого-нибудь способа его нахождения в замкнутой форме, то есть в виде конечного числа операций над элементарными функциями. Многое в вопросе о нахождении интегралов в замкнутой форме было решено в работах Ж. Лиувилля (1809–1882 гг.). Дальнейшее развитие эта тема получила в работах, посвященных разработке алгоритмов символьного интегрирования с использованием ЭВМ. В качестве примера можно привести алгоритм Риша.

Желая подчеркнуть обратность интегрирования по отношению к дифференцированию, некоторые авторы используют термин «антидифференциал» и обозначают неопределенный интеграл $D^{-1>}$.

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Определение первообразной

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную на конечном или бесконечном отрезке X (при этом предполагается, что функция непрерывна на интервале a, b) и имеет правую производную в точке a и левую производную – в точке b.

Пусть функция F(x) определена на множестве D, которое является либо отрезком, либо конечным или бесконечным интервалом.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на множестве D, если в каждой точке множества D она дифференцируема и $F'(x)=f(x)$.

Пример 1. Если $f(x)=x^2$, то $F(x)=\frac{x^3}{3}$ для всех $x\in D$.

Действительно, $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$ для всех $x\in(\infty\,;\,+\infty)$.

Пример 2. Если $f(x)=\frac{1}{x}$, то $F(x)=\ln|x|$ для всех $x\in(0;+\infty)$.

Действительно, $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ для всех $x\in(0;+\infty)$.

Очевидно, что если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на множестве D, то функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной для $f(x)$ на множестве D, так как $F'(x)+C'=f(x)$.

Операция нахождения первообразной является обратной к операции нахождения производной.

Теорема 1. *Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – любые первообразные для $f(x)$ на множестве D,* тогда $F_1(x)-F_2(x)=C$ *для всех* $x\in D$, *где* C *– некоторая постоянная.*

Следствие. *Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на множестве D, то любая первообразная $\Phi(x)$ для $f(x)$ на множестве D представляется в виде $\Phi(x)=F(x)+C$, где C – некоторая постоянная.*

Три правила нахождения первообразных

Правило 1. Если F есть первообразная для f, а G – первообразная для g, то $F+G$ есть первообразная для $f+g$.

Правило 2. Если F есть первообразная для f, а k – постоянная, то функция kF – первообразная для kf.

Правило 3. Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, а k и b постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k} F(kx+b)$ есть первообразная для $f(kx+b)$.

Таблица 1

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$	*Промежуток*
k	$kx+C$	R
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$n \in N$, $x \in R$; $-n \in N$, $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$; $n \notin Z$, $x \in (0;+\infty)$
$\cos x$	$\sin x + C$	R
$\sin x$	$-\cos x + C$	R
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tg\, x + C$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right), k \in Z$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctg\, x + C$	$(\pi k; \pi + \pi k), k \in Z$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$x \geq 0$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
e^x	$e^x + C$	
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$	$x \neq 1$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg\, x + C$	
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + C$	$x \neq 1$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$arcctg\, x + C$	
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$x \neq 0$

Определение 2. Совокупность всех первообразных для $f(x)$ на множестве D называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $\boldsymbol{f(x)dx}$ **–** подынтегральным выражением, а функция $\boldsymbol{f(x)}$ – подынтегральной функцией.

Если $\boldsymbol{F(x)}$ – одна из первообразных для функции $\boldsymbol{f(x)}$ на множестве $\boldsymbol{D}$, то в силу следствия из теоремы 1

$\int \boldsymbol{f(x)dx = F(x) + C}$, *(1)*

где C – произвольная постоянная.

Пример. $\int \mathbf{sin}\, \boldsymbol{xdx = -cosx + C}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Замечание. Если $\boldsymbol{F(x)}$ **–** первообразная для функции $\boldsymbol{f(x)}$ на множестве $\boldsymbol{D}$, то в формуле (1) под знаком интеграла стоит дифференциал функции $\boldsymbol{F(x)}$, действительно $\boldsymbol{dF = F'(x)dx = f(x)dx}$. Будем считать по определению, что $\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int \boldsymbol{F'(x)dx} = \int \boldsymbol{dF(x)}$. *(2)*

1.2. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Пусть функция $\boldsymbol{F(x)}$ дифференцируема на D, тогда $\int \boldsymbol{dF(x) = F(x) + C}$ или $\int \boldsymbol{F'(x)dx = F(x) + C}$.

2. Пусть функция *f(x)* имеет первообразную на множестве D, тогда $\boldsymbol{d}\int \boldsymbol{f(x)dx = f(x)dx}$.

Здесь под интегралом $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ понимается любая первообразная $\boldsymbol{F(x)}$ функции $\boldsymbol{f(x)}$**.** Эта формула справедлива в силу того, что $\boldsymbol{d}\int \boldsymbol{f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx}$.

3. Если функции $\boldsymbol{f_1(x)}$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$ имеют первообразную на множестве *D*, то и функция $\boldsymbol{f_1(x)+f_2(x)}$ также имеет первообразную на *D*, и

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Это равенство означает совпадение двух множеств функций, то есть сумма каких-либо первообразных для функций $\boldsymbol{f_1(x)}$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$ является первообразной для функции $\boldsymbol{f_1(x)+f_2(x)}$**,** и наоборот, всякая первообразная для функции $\boldsymbol{f_1(x)+f_2(x)}$ является суммой некоторых первообразных для функций $\boldsymbol{f_1(x)}$ и $\boldsymbol{f_2(x)}$. Аналогичное свойство имеет место и для разности функций.

4. Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ имеет первообразную на множестве *D* и $\boldsymbol{k}$ – действительное число, то функция $\boldsymbol{kf(x)}$ также имеет первообразную на *D*, причем имеет место равенство $\int \boldsymbol{kf(x)dx = k}\int \boldsymbol{f(x)dx}$.

Свойства 3 и 4 выражают свойства линейности неопределенного интеграла относительно подынтегральной функции.

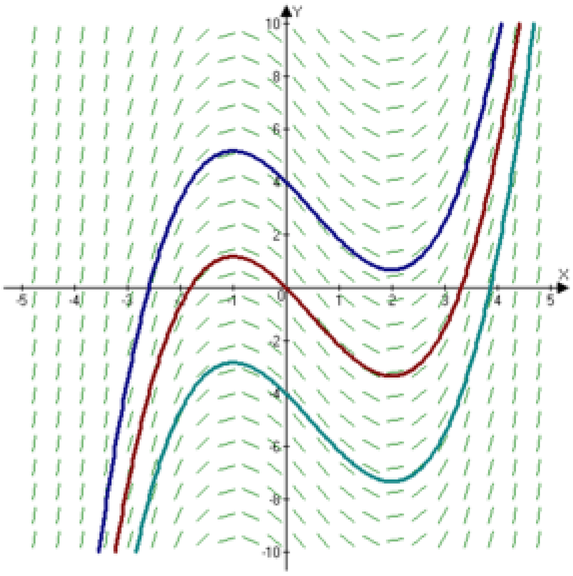


Рис. 2. Геометрическая интерпретация $y'=x^2-x-1$

Рассмотрим геометрическое толкование интегрирования.

Определение 3. Интегральной кривой функции ***y=f(x)*** называется геометрическое место точек, удовлетворяющих выражению ***y'=f(x),*** или, что то же самое, график первообразной ***F(x)*** для функции ***y=f(x)***.

Иными словами, это кривая, касательная к которой при любом значении ***x*** имеет заданное направление, определяемое угловым коэффициентом ***y'=f(x)***, то есть при любом значении независимой переменной ***x*** интегральная кривая задает направление касательной к кривой ***y=f(x)***.

Если построена одна такая интегральная кривая, то по **теореме 1** можно построить все семейство интегральных кривых (рис. 2). Для этого нужно передвигать ее на любой отрезок параллельно оси ***Oy***. Таким образом, семейство описывается уравнением ***y=F(x)+C***.

Для того чтобы определить положение конкретной интегральной кривой, то есть получить выражение искомой первообразной функции, нужно задать какую-нибудь точку, через которую интегральная кривая должна пройти, например, через точку с координатами (x_0, y_0). Подставляя эти начальные значения в уравнение, мы получим уравнение для определения произвольной постоянной ***C***: $y_0 = F(x_0) + C$.

Тогда окончательно первообразная функция, удовлетворяющая поставленному начальному условию, будет иметь вид: $y = F(x) + [y_0 - F(x_0)]$.

Таблица 2

Таблица основных неопределенных интегралов

$\int dx$ = x+C	$\int \frac{dx}{cos^2 x}$ = $tg\ x$ +C
$\int xdx = \frac{x^2}{2}$ + C	$\int \frac{dx}{sin^2 x}$ = -$ctg\ x$ + C
$\int x^n$dx = $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ + C (n≠-1)	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ = $arcsinx$ + C
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$ + C	$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ =$arccos\ x$ +C
$\int e^x dx$ = e^x + C	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ = $arcsin\frac{x}{a}$ + C
$\int \frac{dx}{x}$ = $ln\ \lvert x\rvert + C$ (x≠0)	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\ x + \mathrm{C}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ = $2\sqrt{x}$ + C	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\ arctg\ \frac{x}{a} + \mathrm{C}$
$\int$ sin x dx= - $cos\ x + C$	$\int \frac{dx}{1-x^2}$ = $\frac{1}{2}\ ln\lvert\frac{1+x}{1-x}\rvert$ +C
$\int \cos x\ dx = sin\ x$ +C	$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$ = $\frac{1}{2a}ln\lvert\frac{a+x}{a-x}\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm1}}$ =ln |x + $\sqrt{x^2 \pm 1}$ | +C	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ = ln |x + $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ | +C

Замечание 1. Доказательство всех указанных в таблице формул проводится непосредственным дифференцированием правых частей и проверкой совпадения результата дифференцирования с подынтегральными функциями.

Замечание 2. Операция дифференцирования не выводит нас из класса элементарных функций, однако можно показать, что интегралы от некоторых элементарных функций уже не являются элементарными функциями, например интеграл Пуассона $\int e^{-x^2} dx$.

II. МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Под непосредственным интегрированием подразумевают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл удается привести к одному или нескольким табличным интегралам при помощи применения двух простейших правил интегрирования и при помощи элементарных тождественных преобразований подынтегральной функции.

2.1. Примеры решения методом непосредственного интегрирования

Пример 1. Найти интеграл $\int(5x^4 - 3x^2 + 1)dx$.

Решение: применяя четвертое и третье свойства интегрирования, а затем формулу (1) и второе свойство, получим:

$$\int(5x^4 - 3x^2 + 1)dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx = x^5 - x^3 + x + C.$$

Здесь С является алгебраической суммой четырех произвольных постоянных слагаемых, входящих составной частью в каждый интеграл.

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$.

Решение: данный интеграл не подходит ни под одну из табличных формул, поэтому подынтегральное выражение преобразуем следующим образом, разделив числитель на x^2:

$$\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx = \int(x^4 - x^3 + x^{-2})dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int(x^2 + 2)x\, dx$.

Решение: раскроем скобки в подынтегральном выражении и, применив свойство 2, получим:

$$\int(x^2 + 2)xdx = \int(x^3 + 2x)dx = \int x^3 dx + 2\int xdx = \frac{x^4}{4} + x^2 + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

Решение: представим подынтегральное выражение в виде суммы двух дробей:

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \int \frac{x^2}{(1+x^2)x^2} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение: данный интеграл не подходит ни под одну из табличных формул, поэтому подынтегральное выражение преобразуем следующим образом:

$$\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = 2\int x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{-1}{3}} dx = 2\int x^{\frac{7}{6}} dx = 2\,\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13} x^2\, \sqrt[6]{x} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{3+x^2}$.

Решение: представим подынтегральное выражение в виде суммы двух дробей, разделив числитель на знаменатель $3+x^2$:

$$\int \frac{x^2 dx}{3+x^2} = \int \frac{3+x^2-3}{3+x^2} d\,x = \int \frac{3+x^2}{3+x^2} dx + \int \frac{-3dx}{3+x^2} = \int dx - 3\int \frac{dx}{3+x^2} = x - 3\frac{1}{\sqrt{3}} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= x - \sqrt{3} arctg\frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int 3^x 4^{2x} dx$.

Решение: $\int 3^x 4^{2x} dx = \int (3 \cdot 16)^x\, dx = \int 48^x\, dx = \frac{48^x}{ln48} + C$.

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{25+4x^2}$.

Решение: $\int \frac{dx}{25+4x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\frac{25}{4}+x^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(\frac{5}{2})^2+x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}}\, arctg\frac{x}{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10} arctg\frac{2x}{5} + C.$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9(\frac{1}{9}-x^2)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{3}} + C = \frac{1}{3}\; arcsin 3x + C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{7x^2-\frac{8}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-\frac{8}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}\; ln\left|x + \sqrt{x^2 - \frac{8}{7}}\right| + C.$

Пример 11. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

Решение: так как $1 = sin^2 x + cos^2 x$, то $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{sin^2 x + cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$,

поэтому: $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} =$

$= -ln|cos\, x| + ln|sin\, x| + C = ln\, |tg\, x| + C.$

Пример 12. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}}$.

Решение: так как $11 + 10x - x^2 = 36 - 25 + 10x - x^2 = 36 - (x - 5)^2$, то $\int \frac{dx}{\sqrt{11+10x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-5)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{6^2-(x-5)^2}} = arcsin \frac{x-5}{6} + C$.

При вычислении интегралов полезно соответствующим образом преобразовать подынтегральное выражение, а затем воспользоваться таблицей неопределенных интегралов.

При вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$ удобно использовать следующие тригонометрические формулы, преобразующие произведение в алгебраическую сумму:

$sin\ mx\ cos\ nx = \frac{1}{2}(sin\ (m-n)x + sin\ (m+n)x);$

$sin\ mx\ cos\ nx=\frac{1}{2}(cos\ (m-n)x - cos\ (m+n)x);$

$cos\ mx\ cos\ nx-\frac{1}{2}(cos\ (m-n)x + cos\ (m+n)x).$

Пример 13. Найти интеграл $\int sin3xcos2xdx$.

Решение:

$\int sin3xcos2xdx = \int (\frac{1}{2}\sin(3-2)\,x + \sin(3+2)x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin xdx + \frac{1}{2}\int sin5x\,dx$
$= \frac{1}{2}(-cos\ x) + \frac{1}{2\cdot 5}\int sin\ 5xd(5x) = -\frac{1}{2}cos\ x - \frac{1}{10}cos\ 5x + C.$

Пример 14. Найти интеграл $\int sin4x \sin 5x\, dx$.

Решение:

$\int sin\ 4\,x \sin 5\,x\,d\,x = \int \frac{1}{2}(cos\ (-x) - cos\ 9\ x)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos\ 9\,x\,d\,x =$
$= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2\cdot 9}\int \cos 9x\, d(9)x = \frac{1}{2}sin\ x - \frac{1}{18}sin\ 9x + C.$

Пример 15. Найти интеграл $\int cos3xcos5xdx$.

Решение:

$\int cos3x\ cos5xdx = \int \frac{1}{2}(cos(-2x) + cos8x)\ dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx =$
$= \frac{1}{2\cdot 2}\int cos2xd(2x) + \frac{1}{2\cdot 8}\int \cos 8x\, d(8x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x + C.$

2.2. Задания для самостоятельного решения

Задание № 1. Вычислите интеграл:

1. $\int \mathrm{x}dx$	6. $\int 4^x dx$	11. $\int \frac{3dx}{x}$
2. $\int (x^4 - 3x + cosx)\mathrm{dx}$	7. $\int \sqrt{x}\, dx$	12. $\int (\frac{2}{x} - x)dx$
3. $\int \frac{5}{x} dx$	8. $\int \frac{xdx}{2\sqrt{x}}$	13. $\int \frac{6dx}{1+x^2}$
4. $\int (2x + \sqrt[3]{x})dx$	9. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}dx$	14. $\int \frac{3dx}{4\sqrt{1-x^2}}$
5. $\int \frac{x^8-8x^7+x^3+2}{x^4} dx$	10. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}dx$	15. $\int \frac{sin^2 t-2}{sin^2 t}dt$

Задание № 2. Найти следующие интегралы:

1. $\int \mathrm{x}^6\, dx$ (Ответ: $\frac{\mathrm{x}^7}{7} + C$)
2. $\int 4\mathrm{x}^5\, dx$ (Ответ: $\frac{2}{3}\, x^6 + C$)
3. $\int (1 - 2x)dx$ (Ответ: $x - x^2 + C$)
4. $\int (ax + b)dx$ (Ответ: $\frac{a}{2}x^2 + bx + C$)
5. $\int (2 - 3x^4)dx$ (Ответ: $2x - \frac{3}{5}x^5 + \mathrm{C}$)
6. $\int (3x^2 - 2x + 1)dx$ (Ответ: $x^3 - x^2 + x + C$)
7. $\int (4x^3 + 3x^2 + 4x - 3)dx$ (Ответ: $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + C$)
8. $\int (ax^3 + bx^2 + cx + e)dx$ (Ответ: $\frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + ex + C$)
9. $\int \frac{dx}{x^2}$ (Ответ: $-\frac{1}{x} + C$)
10. $\int \frac{5dt}{t^3}$ (Ответ: $-\frac{5}{2t^2} + C$)
11. $\int (\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^3})\, dx$ (Ответ: $-\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2x^2} + C$)
12. $\int (x^3 - x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})dx$ (Ответ: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$)
13. $\int \frac{x^5+x^3+1}{x^2}dx$ (Ответ: $\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + C$)
14. $\int \sqrt[3]{t}\, dt$ (Ответ: $\frac{3}{4}t\, \sqrt[3]{t} + C$)
15. $\int 2\sqrt[5]{t^3}dt$ (Ответ: $\frac{5}{4}t\, \sqrt[5]{t^3} + C$)
16. $\int (2u - 3\sqrt[2]{u})du$ (Ответ: $u^2 - 2u\sqrt{u} + C$)
17. $\int \frac{dv}{3\sqrt{v}}$ (Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{v} + C$)

III. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ (МЕТОД ПОДСТАНОВКИ)

В основе метода подстановки (или метода замены переменной) вычисления неопределенных интегралов лежит следующее утверждение, являющееся следствием правила дифференцирования сложной функции:

1. Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Предположим, что существует дифференцируемая функция ***φ (x)*** и функция ***g(x)*** такие, что подынтегральное выражение ***f(x)dx*** может быть записано в виде: ***f(x) dx = g(φ(x)) φ(x) dx = g(φ(x)) dφ(x) = g(t) dt***.

Это преобразование называется подведением ***φ (x)*** под знак дифференциала. В этом случае справедливо следующее утверждение:

Теорема 2

$\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int \boldsymbol{g(\varphi(x))\varphi(x)dx} = \int \boldsymbol{g(\varphi\ (x))d\ \varphi\ (x)} = \int \boldsymbol{g(t)dt}$, где ***t = φ(x).***

По этой теореме вычисление интеграла $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ сводится к вычислению интеграла $\int \boldsymbol{g(t)dt}$, который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке ***t = φ(x)***.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Производят замену под интегралом.

5. Находят полученный интеграл.

6. В результате производят обратную замену, то есть переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

3.1. Примеры решения методом подстановки

Пример 1. $\int (2x5)^7 dx$ = |*пусть t = 2x–5, тогда dt = 2dx, dx =* $\frac{dt}{2}$| = $\frac{1}{2}\int t^7 du$ = $= \frac{1}{2}\frac{t^8}{8} + C = \frac{(2x-5)^8}{16} + C.$

Пример 2. $\int sin^4 x \cdot cosxdx$ = |*пусть t = sinx, тогда dt = cosxdx* |= $= \int t^4\, dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{sin^5 x}{5} + C.$

2. Пусть требуется вычислить интеграл $\int \boldsymbol{f(x)dx}$. Введем новую переменную $\boldsymbol{t}$ формулой $\boldsymbol{x=\varphi(t)}$, где $\boldsymbol{\varphi(t)}$ – строго монотонная дифференцируемая функция.

Подставим $\boldsymbol{x=\varphi(t)}$ в исходное подынтегральное выражение, получим:

$$\boldsymbol{f(x)dx = f(\varphi(t))\,\varphi(t)dt = g(t)dt}.$$

Тогда получим справедливое утверждение, аналогичное утверждению **теоремы 2**.

Теорема 3. $\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int \boldsymbol{f\big(\varphi(t)\big)\,\varphi(t)dt} = \int \boldsymbol{g(t)dt}$, где $\boldsymbol{t=\varphi^{-1}(x)}$ – функция, обратная к $\boldsymbol{x=\varphi(t)}$.

По этой теореме вычисление интеграла $\int \boldsymbol{f(x)dx}$ сводится к вычислению интеграла $\int \boldsymbol{g(t)dt}$, который может оказаться проще исходного, и последующей подстановке $\boldsymbol{t=\varphi(x)}$.

Пример 3

$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=$|Пусть $x=t^2$, тогда $dx=2tdt$|$=\int \frac{e^t}{t}2tdt=2\int e^t\,dt=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C.$

Пример 4

$\int \frac{x+cosx}{x^2+sin2x}dx=$ $\left|\text{Пусть } t=x^2+\sin 2x, \text{ тогда } dt=(2x+2cos2x)dx;\ (x+cos2x)dx=\frac{1}{2}dt\right|$ $=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$

$=\frac{1}{2}\,ln|t|+C=\frac{1}{2}\,ln|x^2+sin2x|+C.$

Пример 5

$\int\sqrt{2x+3}dx=$ |пусть $2x+3=t$, *тогда* $dt=2dx$ *и* $dx=\frac{dt}{2}$| $=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=$

$=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+C=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}+C.$

Пример 6

$\int\frac{\boldsymbol{x^2}}{(\boldsymbol{1+x})^3}dx=$|пусть $1+x^3=t$, *тогда* $dt=3x^2dx$ *и* $x^2dx=\frac{dt}{3}$|$=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}lnt+C=\frac{1}{3}ln(1+x^3+C.$

Пример 7

$\int\frac{dx}{9+x^2}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}}=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{1+(\frac{x}{3})^2}=$|пусть $\frac{x}{3}=t$, *тогда* $dt=\frac{dx}{3}$ и $dx=3dt$|$=\frac{1}{9}\int\frac{3dt}{1+t^2}=$

$=\frac{1}{3}arctg\,t+C=\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$

Пример 8

$\int \frac{\boldsymbol{2e^x dx}}{(\boldsymbol{1-e^x})^2}$=|пусть*1-e^x = t, тогда dt*=$-e^x dx$|=$\int \frac{-2dt}{t^2}$=-2$\int \frac{dt}{t^2}$=$\frac{2}{t}$+C=$\frac{2}{1-e^x}$+*C.*

Пример 9

$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-\cos x}}$=|пусть*1- cosx = t, тогда dt=sinxdx*|=$\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ = *2*$\sqrt{t}$ *+C=2*$\sqrt{1-\cos x}$*+C.*

Пример 10

$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{3(1-\frac{5x^2}{3}}}} = \int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{5x^2}{3}}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{\sqrt{5}x^2}{\sqrt{3}}}}}$ =| пусть $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ *x = t,*

тогда dt = $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$*dx, dx*=$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dt$|=$\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dt}{\sqrt{1-t^2}}$=$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$=$\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin t$+*C*=$\frac{1}{\sqrt{5}}$*arcsin* $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$*x +C.*

Пример 11

$\int tg\, xdx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x}$=|пусть *cos x=t, тогда dt=-sinxdx, sinxdx=-dt*|=-$\int \frac{dt}{t}$*=-ln t+C=*
=-lncos x +C.

Пример 12

$\int cos^2 xdx$ = | *заменим cos^2 x по формуле cos^2 x* = $\frac{1+cos2x}{2}$| = $\int \frac{1+cos2x}{2}dx$ =
= $\int \frac{1}{2}dx + \int \frac{1}{2}cos2xdx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$

3.2. Задания для самостоятельного решения

Задание № 1. Вычислите интеграл:

1. $\int(3+5x)^4 dx$	7. $\int cos4xdx$	13. $\int sin^2 xdx$
2. $\int \sqrt{x+2}dx$	8. $\int \frac{dx}{cos^2 2x}$	14. $\int \frac{dx}{5+4x^2}$
3. $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$	9. $\int \frac{dx}{cos^2(1-2x)}$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
4. $\int \frac{dx}{1+2x}$	10. $\int \frac{cosxdx}{1+sinx}$	16. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x}dx$
5. $\int \frac{2dx}{3-4x}$	11. $\int ctgxdx$	17. $\int \frac{dx}{9-4x^2}$
6. $\int sin2xdx$	12. $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$	18. $\int \frac{sinxdx}{cos^2 x}$

IV. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Пусть $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ дифференцируемые функции от $\boldsymbol{x}$. Тогда, как известно, $\boldsymbol{d(uv) = udv + vdu}$, откуда следует, что $\boldsymbol{udv = uv - vdu}$.

Интегрирование обеих частей этого равенства дает $\int \boldsymbol{udv}=\int \boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{uv}) - \int \boldsymbol{vdu}$. Так как $\int \boldsymbol{d}\,(\boldsymbol{uv})=\boldsymbol{uv}$ в силу обратности операций дифференцирования и интегрирования, то получаем $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$ *(1)*.

Это формула интегрирования по частям, позволяющая переходить от заданного интеграла $\int \boldsymbol{udv}$ к интегралу $\int \boldsymbol{vdu}$, последний при удачном разбиении подынтегрального выражения на $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{dv}$ может оказаться более простым, чем первоначальный.

Теорема. *Пусть функции* $\boldsymbol{u(x)}$ *и* $\boldsymbol{v(x)}$ *дифференцируемы на множестве* $\boldsymbol{D}$ *и, кроме того, на этом множестве существует первообразная для функции* $\boldsymbol{u(x)v'(x)}$. *Тогда на множестве D существует первообразная для функции* $\boldsymbol{u(x)v'(x)}$ *и справедлива формула*

$$\int \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \boldsymbol{u(x)v(x)} - \int \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx}. \quad (1)$$

Замечание. Определение дифференциала и свойство инвариантности его формы позволяют записать эту формулу в виде $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$.

Формула (1) сводит вопрос о вычислении интеграла $\int \boldsymbol{udv}$ к вычислению интеграла $\int \boldsymbol{vdu}$. В ряде конкретных случаев этот последний интеграл проще исходного.

Вычисление интеграла $\int \boldsymbol{udv}$ посредством применения формулы (1) называют интегрированием по частям.

Эта формула часто применяется, когда подынтегральной функцией является логарифмическая и обратная тригонометрическая; произведение каждой из этих функций на алгебраическую; произведение, содержащее алгебраические, тригонометрические, показательные функции, и в некоторых других случаях.

4.1. Примеры решения интегрированием по частям

Пример 1

$\int \ln x\,dx = \mid$ полагаем $u=lnx$ и $dv=dx$, тогда $du=\frac{dx}{x}$, и $v=x \mid = xlnx - \int x\frac{dx}{x} =$
$= xlnx - \int dx = xlnx - x + C.$

Пример 2

$\int(2x-5)e^{-3x}dx$=| полагаем u=2x-5 $u dv=e^{-3x}dx$, тогда du=2dx и v=-$\frac{1}{3}e^{-3x}$|= =-$\frac{1}{3}$(2x-5)e^{-3x}-$\int-\frac{2}{3}e^{-3x}dx$=-$\frac{1}{3}$(2$x$-5)$e^{-3x}$+$\frac{2}{3}\int e^{-3x}dx$=-$\frac{1}{3}$(2$x$-5)$e^{-3x}$ - $\frac{2}{9}e^{-3x}+C$ = =$\frac{13-6x}{9}e^{-3x}+C$.

Пример 3

$\int xarctgxdx$=|полагаем $u=arctgx$и $dv=xdx$, тогда $du=\frac{dx}{1+x^2}$ и $v=\frac{x^2}{2}$| =$\frac{x^2}{2}arctgx$- -$\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$ = $\frac{x^2}{2}arctgx$ - $\frac{1}{2}\int\frac{1+x^2-1}{1+x^2}$ =$\frac{x^2}{2}arctgx$ -$\frac{1}{2}\int dx$+ $\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$=$\frac{x^2}{2}arctgx$ - $\frac{1}{2}x$ + +$\frac{1}{2}arctgx$ +C.

Пример 4

$\int(x^2-3x+2)\cos 5x\,dx$ =| полагаем $u=x^2$-3x+2 $u dv=cos5xdx$, тогда du = = (2x-3)dx и v = $\frac{1}{5}sin\ 5x$| = (x^2-3x+2)$\frac{1}{5}sin\ 5x$ -$\frac{1}{5}\int(2x-3)sin5xdx$ = | полагаем $u=\frac{2x-3}{5}$ $u dv=sin5xdx$, тогда $du=\frac{2}{5}dx$ и $v=\frac{1}{5}cos5x$|=$\frac{x^2-3x+2}{5}sin5x$+$\frac{2x-3}{25}cos5x$-$\frac{2}{125}sin$ + +C=$\frac{25x^2-75x+48}{125}sin5x$ +$\frac{2x-3}{25}\cos 5x+C$.

Пример 5

$\int arcsin\,xdx$ = | полагаем $u=arcsinx$ и dv = dx, тогда du = $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и v = x|=x·$arcsinx$- $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$ =| пусть 1- x^2 = t, *тогда* dt = -2xdx и xdx= =- $\frac{dt}{2}$|=x·$arcsinx$+$\sqrt{1-x^2}$+C.

4.2. Задания для самостоятельного решения

Задание № 1. Вычислите интеграл:

1. $\int x\,lnxdx$	*Ответ.* $\frac{x^2}{4}$(2ln$x$–1) + C
2. $\int xe^{-2x}\,dx$	*Ответ.* –$\frac{2x+1}{4}e^{-2x}$ + C
3. $\int xcos\,2xdx$	*Ответ.* $\frac{x}{2}$sin2x + $\frac{1}{4}$cos2x + C
4. $\int(4-3x)e^{-2x}dx$	*Ответ.* $\frac{6x-5}{4}e^{-2x}$ + C
5. $\int(2x-3)sin\frac{x}{2}dx$	*Ответ.* (6 – 4x)cos$\frac{x}{2}$ + 8sin$\frac{x}{2}$ + C

6. $\int (3x-4) lnx dx$	*Ответ.* $(\frac{3}{2}x^2 - 4x)lnx - \frac{3}{4}x^2 + 4x + C$
7. $\int x^2 e^{-x} dx$	*Ответ.* $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C$
8. $\int \frac{lnx}{\sqrt{x}} dx$	*Ответ.* $2\sqrt{x}\,(lnx - 2) + C$
9. $\int (x^2 - 5x + 8) sin2x\, dx$	*Ответ.* $-\frac{2x^2-10x+15}{4}cos2x + \frac{2x-5}{4}sin2x + C$

V. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Определение 1. Функция вида $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$, где $a_0, \neq 0$ называется *многочленом или полиномом n-ой степени.*

Определение 2. Функция вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены, называется *рациональной функцией* или *рациональной дробью*, причем дробь называется *правильной*, если $\boldsymbol{n \leq m}$, и *неправильной*, если $\boldsymbol{n \geq m}$.

Так, дроби $\frac{x-1}{x^2-4}, \frac{3}{(x+3)^2}, \frac{x^2}{8+x^3}$ – правильные,

а дроби $\frac{x^3}{x^2-1}, \frac{x^2-1}{x^2+1}, \frac{x}{ax+b}$ – неправильные.

Если требуется проинтегрировать неправильную дробь, то предварительно следует перейти к правильной дроби путем выделения целой части.

5.1. Примеры интегрирования рациональных функций

Пример 1

Так, $\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x^3-x+x}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$, а потому $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int x dx + \int \frac{x dx}{x^2-1} =$
$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} ln|x^2 - 1| + C.$

Пример 2

$$\int \frac{4x-10}{x^2-4x+13} dx = \int \frac{2(2x-4)-2}{x^2-4x+13} dx = 2\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13} dx - 2\int \frac{dx}{x^2-4x+13} =$$
$$= 2\int \frac{d(x^2-4x+13)}{x^2-4x+13} - 2\int \frac{dx}{(x-2)^2+9} = 2\ln|x^2-4x+13| - 2\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+3^2} =$$
$$= 2\ln|x^2-4x+13| - \frac{2}{3} arctg \frac{x-2}{3} + C.$$

Пример 3

$\int \frac{x}{x^2-5x+6} dx.$

Здесь $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ и $\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$.

Сравнение числителей дает $A(x-3)+B(x-2) = x$. Отсюда при $x = 2$ получаем $-A = 2$ или $A = -2$; при $x = 3$ получаем $B = 3$.

Таким образом, $\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}$ и, следовательно,

$\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx = -2\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x-3} = 3ln|x\text{-}3| - 2ln|x\text{-}2| + C = lnC\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}.$

Пример 4

$\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx.$

Т.к. $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то $\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Итак:

$$\int \frac{5}{x-2}dx+\int \frac{3}{x-4}dx+\int \frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int \frac{x}{x^2+4}dx+\int \frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Пример 5

$\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx.$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r|l} -\;6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \underline{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{2x^2 + 3} \\ -\;9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\ \underline{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} & \\ 20x^2 - 25x - 25 & \end{array}$$

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$

$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx.$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при $x = 3$ знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r|l} -\;3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x - 3 \\ \underline{3x^3 - 9x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{3x^2 + 5x - 2} \\ -\;5x^2 - 17x & \\ \underline{5x^2 - 15x} & \\ -\;2x + 6 & \\ \underline{2x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом, $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2-5x-5}{(x-3)(x+2)(3x-1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1)+B(x-3)(3x-1)+C(x-3)(x+2)=4x^2-5x-5.$$

Для того чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой), применяют так называемый **метод произвольных значений.** Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений x. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, –2, 1/3.

Получаем:

$$\begin{cases}40A=16\\35B=21\\C=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=2/5\\B=3/5\\C=1\end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+3\int\frac{dx}{x+2}+2\int\frac{dx}{x-3}+5\int\frac{dx}{3x-1}=$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Пример 6

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx = \int \frac{A}{x+3}dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+2}dx.$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15.$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$

$$= (D+A)x^4 + (3D+E)x^3 + (A+B+2D+3E+4A)x^2 + (3B+C+6D+2E)x + (2A+3C+6E+4A).$$

$$\begin{cases} D + A = 3 \\ 3D + E = 0 \\ B + 2D + 3E + 4A = 14 \\ 3B + C + 6D + 2E = 7 \\ 3C + 6E + 4A = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 6 - 2A - 27 + 9A + 4A = 14 \\ 3B + C + 18 - 6A - 18 + 6A = 7 \\ 3C - 54 + 18A + 4A = 15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ B + 11A = 35 \\ 3B + C = 7 \\ 3C + 22A = 69 \end{cases} \qquad \begin{cases} D = 3 - A \\ E = -9 + 3A \\ 11A = 35 - B \\ C = 7 - 3B \\ 21 - 9B + 70 - 2B = 69 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \\ C = 1 \\ D = 0 \\ E = 0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2}dx = 3\int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{x}{(x^2+2)^2}dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} +$$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

5.2. Задания для самостоятельного решения

Вычислите интеграл:

1. $\int \frac{x^2+2x-1}{(x-3)^2(x+1)}dx$	*Ответ.* $-\frac{7}{2(x-3)}+\frac{9}{8}ln\vert x-3\vert - \frac{1}{8}ln\vert x+1\vert + C$
2. $\int \frac{5x-2}{x^3-8x^2}dx$	*Ответ.* $-\frac{1}{4x}+\frac{19}{32}ln\left\vert\frac{x-8}{x}\right\vert + C$

3. $\int \frac{2x+5}{x^2-6x+9}dx$	*Ответ.* $-\frac{11}{x-3}+2ln\|x-3\|+C$

VI. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим **интегралы вида** $\int R(sinx, cosx)dx$**.** Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональных функций заменой переменной

$$T = tg\,\frac{x}{2},\ \text{где}\ \ -\pi < x < \pi.$$

Такая замена называется *универсальной тригонометрической подстановкой*.

В этом случае:

$sin\,x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$;

$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$;

$x = 2arctg\ t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

Тогда $\int R(sinx, cosx)dx = \int R(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2})\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$

6.1. Примеры интегрирования тригонометрических функций

Пример 1

Найти $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Решение: положим $t = tg\,\frac{x}{2}$. Тогда, используя выражения через t для dx и $sinx$, указанные выше, получаем, что искомый интеграл равен

$$\int \frac{(1+t^2)2dt}{(1+t^2)2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\,\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 2

$$\int \frac{dx}{3\sin x + 5\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 5\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{5+6t-5t^2} =$$

$$= -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{6}{5}t - 1} = -\frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t-\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{34}{25}} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{34}{25}}}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{5}-\sqrt{\frac{34}{25}}}{t-\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{34}{25}}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{34}}\ln\left|\frac{5t-3-\sqrt{34}}{5t-3+\sqrt{34}}\right| + C = -\frac{1}{\sqrt{34}}\ln\left|\frac{5tg\,\frac{x}{2}-3-\sqrt{34}}{5tg\,\frac{x}{2}-3+\sqrt{34}}\right| + C\ .$$

При вычислении интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$ рассмотрим частные случаи:

n – нечетное

$$\int \sin^3 x \cos^m dx = \int \sin^2 x \cos^m x \sin x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^m x\, d(-\cos x);$$

n, m – четные, ≥ 0.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$$

применяют формулы тригонометрии:

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2x);$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

При вычислении интегралов вида $\int R(tg\, x, ctg\, x)dx$ делают замену $tg\, x = t$, тогда:

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2};$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2};$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Если интеграл **имеет вид** $\int tg^n x\, ctg^m x\, dx$**,** где n, m – четные,

применяют формулу: $tg^2 x = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$.

Пример 3

Вычислить интеграл:

$$\int tg^3 x\, dx = \int tg\, x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int tg\, x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int tg\, x\, dx = \frac{tg^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$$

Пример 4

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx = \int tg^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x\, d(tg\, x) = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

6.2. Задания для самостоятельного решения

Вычислите интеграл:

1. $\int \sin^3 x dx$	*Ответ.* $\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$
2. $\int \cos^5 x dx$	*Ответ.* $\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \sin x + C$
3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	*Ответ.* $-ctgx - \frac{1}{3}ctg^3 x + C$
4. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$	*Ответ.* $\frac{1}{4}\ln\left\|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right\| + C$
5. $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}dx$	*Ответ.* $-\ln\|\cos x - \sin x\| + C$

VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

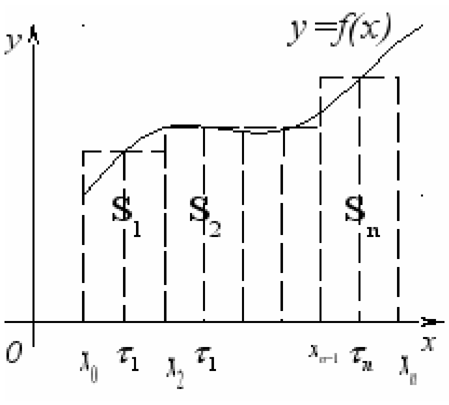
7.1. Задачи, приводящие к определенному интегралу

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть функция $\boldsymbol{y = f(x)}$ определена, непрерывна и положительна в промежутке $[a,\ b]$. Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную графиком функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$, и $x = b$.

Пусть на отрезке $[a,\ b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a,\ b]$ на n элементарных отрезков точками $x_0, x_1, \dots, x_n$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. На каждом отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ разбиения выберем некоторую точку τ_i и положим $\Delta x_i = [x_{i-1}, x_i]$, где $i = 1, 2, \dots n$.

Сумму вида $\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i$ будем называть ***интегральной суммой*** для функции $y = f(x)$ на $[a,\ b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит как от способа разбиения отрезка $[a,\ b]$ точками $x_0, x_1, \dots, x_n$:, так и от выбора точек $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ на каждом из отрезков разбиения $\Delta x_i = [x_{i-1},\ x_i]$, $i = 1, 2, \dots n$.



Если существует предел $\lim\limits_{k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\,\Delta x_k$, не зависящий от способа разбиения отрезка **[a, b]** и выбора точек τ_i, то этот предел будем называть ***определенным интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначать символом $\int_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется ***интегрируемой*** на отрезке **[a, b].** При этом ***f(x)*** называется ***подынтегральной функцией, f(x) dx*** – ***подынтегральным выражением,*** а числа ***a*** и ***b*** – ***пределами интегрирования*** (a – нижний предел, b – верхний предел), а сумма $\sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta x_k$ – ***интегральной суммой.***

Теорема. *Функция* ***f(x)*** *интегрируема в промежутке* ***[a, b]****, если выполнено любое из следующих условий:*

f(x) *непрерывна в замкнутом промежутке* **[a, b]**;

f(x) *ограничена и кусочно-непрерывна в* ***[a, b],*** *то есть имеет в этом промежутке лишь конечное число разрывов первого рода;*

f(x) *определена и монотонна в замкнутом промежутке* ***[a, b].***

7.2. Свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx$=0.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b kf(x)dx$=$k\int_a^b f(x)dx$.

3. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:

$\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx$=$\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$.

4. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

5. Интеграл по отрезку равен сумме интегралов по его частям:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $a < c < b$.

Теорема Ньютона-Лейбница

Если функция $\boldsymbol{f(x)}$ непрерывна на отрезке $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ и $\boldsymbol{F(x)}$ – первообразная функции $\boldsymbol{f(x)}$ на этом отрезке, то $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$.

Эта формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница.***

При вычислении интегралов ее часто записывают в виде $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b =}$ $\boldsymbol{= F(b) - F(a)}$.

Например, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = sinx|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

Замена переменной в определенном интеграле

Предположим, что функция $\boldsymbol{f(x)}$ *непрерывна на отрезке* $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, *функция* $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$ *имеет на отрезке* $[\boldsymbol{t_1}, \boldsymbol{t_2}]$ *непрерывную производную, при этом* $\boldsymbol{a \le \varphi(t) \le b}$ *и* $\boldsymbol{\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b}$. *Тогда* $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)\varphi'(t)dt}$.

Пример 1. Найдем $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Решение: воспользуемся подстановкой $x = \sin t$; тогда $dx = \cos t dt$. Найдем новые пределы интегрирования: если $x=0$, то $t=0$, если $x=1$, то $t=\frac{\pi}{2}$. Получим:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

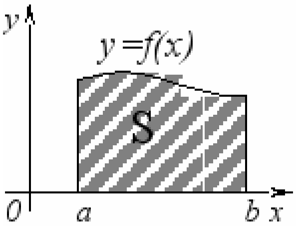
7.3. Задания для самостоятельного решения

1. $\int_1^2 x dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dt}{cos^2 t}$
2. $\int_0^3 x^2 \mathrm{dx}$	$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3} \cos t dt$
3. $\int_0^1 (2x+1) dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos\varphi + sin\varphi) d\varphi$
4. $\int_{-1}^0 (3x^2+1) dx$	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\frac{2}{cos^2 x} + sinx) dx$
5. $\int_{-1}^1 (\frac{1}{2}x+4x^2) dx$	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{sin^2 x}) dx$
6. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$	$\int_0^{\pi} (e^x - \cos x) dx$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\varphi d\varphi$	$\int_0^{0,5} \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$
8. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$	*Отв.* $\frac{7}{3}$
9. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx$	*Отв.* $33\frac{1}{3}$
10. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$	*Отв.* $\frac{7}{4}$
11. $\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$	*Отв.* $5\frac{1}{3}$
12. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1}$	*Отв.* $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$

VIII. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

8.1. Вычисление площадей плоских фигур

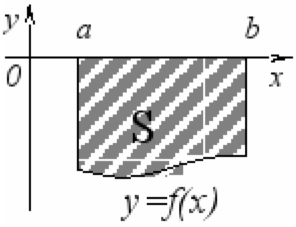
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$. Если при этом $f(x) \ge 0$ на этом отрезке, то площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, выразится с помощью интеграла:



$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Замечания:

1.Если же $f(x) \le 0$ на $[a,\ b]$, то $-\ f(x) \ge 0$ на этом отрезке. Поэтому площадь S соответствующей криволинейной трапеции находится по формуле

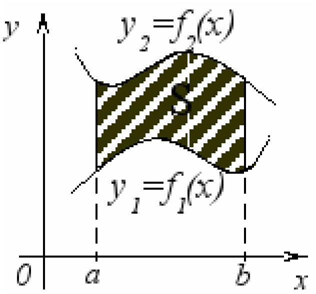


$$S = -\int_a^b f(x)dx,$$

или $$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Наконец, если линия $\boldsymbol{y = f(x)}$ пересекает ось Ox, то отрезок $[a,\ b]$ надо разбить на части, в пределах которых $\boldsymbol{f(x)}$ не меняет знака, и к каждой части применить ту из формул, которая ей соответствует.

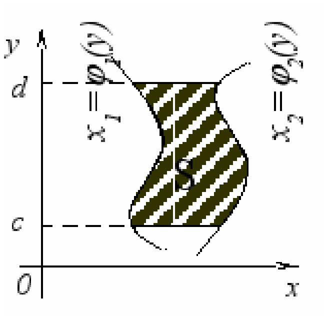
2. Площадь криволинейной фигуры, ограниченной сверху графиком функции $\boldsymbol{y_2=f_2(x)}$, снизу – графиком функции $\boldsymbol{y_1=f_1(x)}$, слева и справа прямыми $\boldsymbol{x=a}$, $\boldsymbol{x=b}$, вычисляется по формуле:



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx\ .$$

или

3. Площадь криволинейной фигуры, ограниченной справа графиком функции $\boldsymbol{x_2 = \varphi_2(y)}$, слева – графиком функции $\boldsymbol{x_1 = \varphi_1(y)}$, снизу и сверху прямыми $\boldsymbol{y = c}$, $\boldsymbol{y = d}$, вычисляется по формуле:



$$S=\int_c^d(\varphi_2(y)-\varphi_1(y))dy\,.$$

или

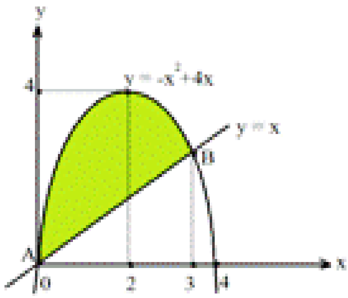
Пример 1

Вычислить площадь земельного участка, ограниченного участком параболы ***y* = – *x*^{2} + *4x*** и отрезком прямой ***y* = *x*.**

В конце самостоятельной работы на экране демонстрируется правильное решение.

Решение:

Построим графики указанных функций в одной системе координат.



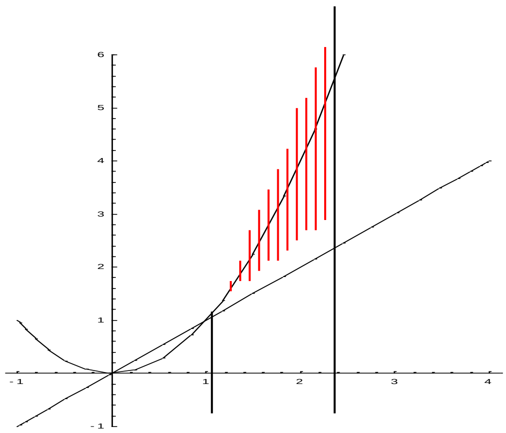
Найдем абсциссы точек пересечения графиков. Для этого решим уравнение $-x^2+4x=x \Leftrightarrow -x^2+4x-x=0 \Leftrightarrow -x^2+3x=0 \Leftrightarrow x(3-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=3$.

Площадь искомой фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций, а значит, разности двух определенных интегралов на промежутке [0; 3].

$S=\int_0^3(-x^2+4x)dx-\int_0^3 xdx=\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^3=(-9+27/2)-0=$
$=9/2=4{,}5$ (ед^2).

Пример 2

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x$, $y=x^2$, $x=2$.

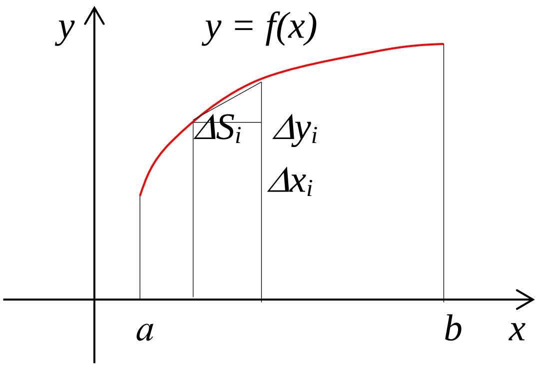


Решение:

Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S=\int_1^2 x^2dx-\int_1^2 xdx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\text{(ед}^2\text{)}.$$

8.2. Вычисление длины дуги кривой



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S=\lim\limits_{\max \Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i=\sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i$.

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$.

Тогда можно показать, что $S=\lim\limits_{\max \Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$.

Т.е. $S=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем:

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt,$$

где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если задана **пространственная кривая**, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}\,dt\,.$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\,d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Пример 3

Найти длину окружности, заданной уравнением $\boldsymbol{x^2 + y^2 = r^2}$.

Решение:

Выразим из уравнения переменную y: $\quad y = \sqrt{r^2 - x^2}\,.$

Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,.$

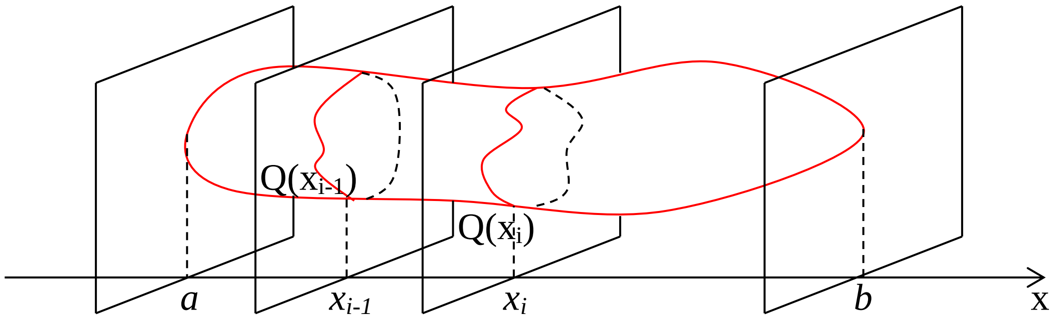
Тогда $\dfrac{1}{4}S = \displaystyle\int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = r \cdot \arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}\,.$

Тогда $\boldsymbol{S = 2\pi r}$.

Получили общеизвестную формулу длины окружности.

8.3. Вычисление объемов тел

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на «слои» поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком-либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i \Delta x_i$ и $m_i \Delta x_i$, здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx .$$

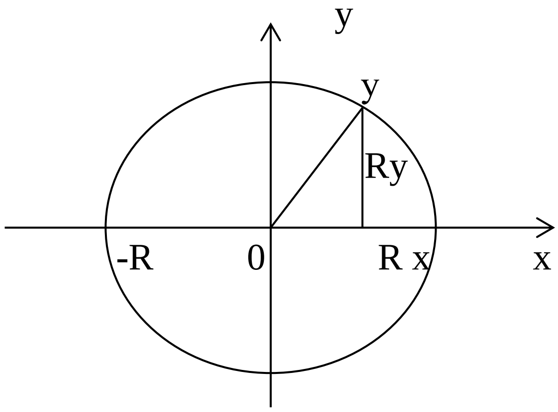
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx .$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример 4. Найти объем шара радиуса R.

Решение:



В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

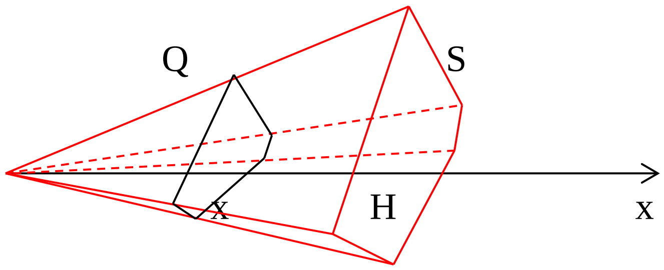
Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3} .$$

Пример 5. Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.

Решение:



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению *x/H,* где *x* – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

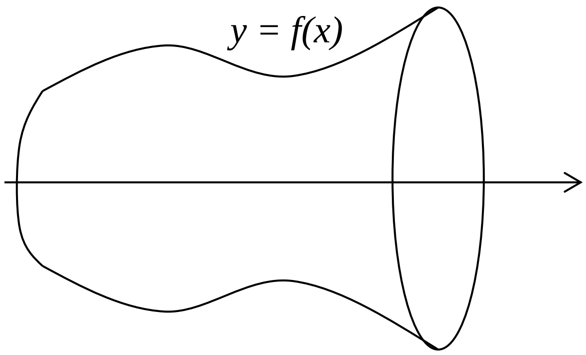
Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е. $\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$.

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2 dx = \left.\frac{Sx^3}{3H^2}\right|_0^H = \frac{1}{3}SH$.

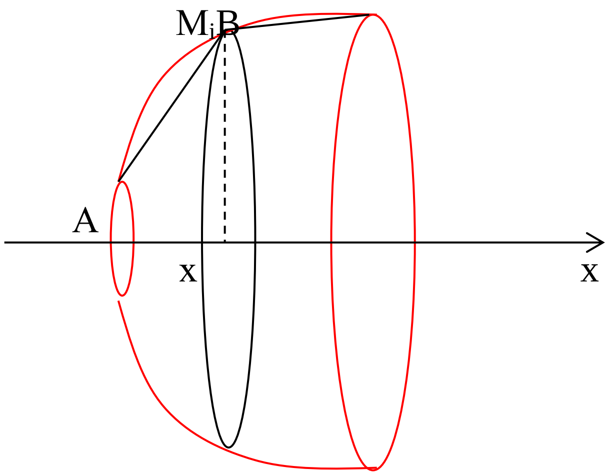
8.4. Объем тел вращения

Рассмотрим кривую, заданную уравнением *y = f(x).* Предположим, что функция *f(x)* непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси *Ox*, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью *x* = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

8.5. Площадь поверхности тела вращения



Определение. Площадью поверхности вращения кривой *AB* вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую *AB*, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу *AB* на *n* частей точками M_0, M_1, M_2, …, M_n. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i .$$

Здесь ΔS_i – длина каждой хорды.

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i .$$

Применяем теорему Лагранжа к отношению $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i .$

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i .$

$\Delta P_i = 2\pi \dfrac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i .$

Площадь поверхности, описанной ломаной, равна:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i) \right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i \ .$$

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P=\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i=\lim_{\max \Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\varepsilon_i)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i .$$

Тогда $P=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ – формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

8.6. Задания для самостоятельного решения

1. Найдите площадь области, ограниченной графиком функции $y=\sin x$ и осью абсцисс при условии $0\le x\le 2\pi$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x + 1)^2$ и прямой $y=1-x$ и осью OX.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sqrt{x}$ и прямой $y = x$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, прямой $x = 0{,}5$ и прямой $x = 1$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 9 - x^2$, прямой $x=-1$ и $x = 2$.

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами:
$y=-x^2 + 8x - 5$, $y = x^2 - 2x + 3$.

7. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 9$.

8. Фигура, ограниченная прямыми $y = -x+3$, $x = 0$, $x = 3$ и $y = 0$, вращается вокруг оси Ox. Найдите объем полученного тела.

9. Фигура ограничена кривой $y = \frac{1}{x}$ и прямыми $x = 2$, $x = 3$ и $y = 0$. Найдите объем тела, полученного от вращения ее вокруг оси Ox.

IX. ПРИМЕНЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ФИЗИКЕ

9.1. Задачи о вычислении пути

Пример 1

Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt, \qquad (1).$$

Решение:

$t_1 = 0$ с; $t_2 = 5$с.

По формуле (1) найдем путь, пройденный телом за 5 сек.

$$S=\int_0^5 (2t+3t^2)dt = (t^2+t^3)\Big|_0^5 =150 \text{ (м)}.$$

Ответ: S=150 м.

Пример 2

Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе – со скоростью $v_2 = (4t + 5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

Решение:

Искомая величина есть разность расстояний, пройденных телами за 5 с.

$$S_1=\int_0^5 (6t^2 +2t)dt = (2t^2+t^3)\Big|_0^5 = 275 \text{ (м)}$$

$$S_2=\int_0^5 (4t+2)dt = (2t^2+5t)\Big|_0^5 = 75 \text{ (м)}$$

Таким образом, $S = S_1 – S_2 = 275 – 75 = 200$ (м).

Ответ: S = 200 м.

Пример 3

Скорость движения точки $v = (9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

Решение:

Согласно условию, $f(t) = 9t^2 - 8t$, $t_1 = 3, t_2 = 4$. Следовательно,

$s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)dt = [3t^3 - 4t^2]_3^4 = 83$ (м).

Ответ: s = 83 м.

Пример 4

Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью v = (39,2 – 9,8t) м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Решение:

Тело достигнет наибольшей высоты подъема в такой момент времени t, когда

v = 0, т.е. 39,2 – 9,8t = 0, откуда t = 4 с. По формуле (1) находим:

$$s = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)dt = [39{,}{,}2t - 4{,}9t^2]_0^4 = 78{,}4 \text{ (м)}.$$

Ответ: 78,4 м.

9.2. Задачи о вычислении работы переменной силы

Работа А этой силы F вычисляется по формуле:

$A=F\cdot s$, (2), где S – перемещение, м.

Если F – сила упругости, то по закону Гука

$F = kx$, (2), где x – величина растяжения или сжатия, k – коэффициент пропорциональности.

Работа переменной силы вычисляется по формуле $A=\int_a^b f(x)dx$ (3).

Пример 5

Сила упругости F пружины, растянутой на l_1 = 0,05 м, равна 3*Н*. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на l_2 = 0,1 м?

Решение:

Определим коэффициент пропорциональности *k*.

Подставим в формулу (2*) F = 3*Н*, x = 0,05 м: 3 = k 0,05, т.е. k = 60, следовательно, $F = 60x = f(x)$.

Подставив $F = 60x$ в формулу (3), найдем значение работы переменной силы, полагая, что a = 0; b = 0,1:

$$A=\int_0^{0{,}1} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0{,}1} = 0{,}3 \text{ Дж}.$$

Ответ. А = 0,3 Дж.

Пример 6

Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее от 0,22 до 0,32 м?

Решение:

Используя равенство (3), имеем 50 = 0,01k, т.е. k = 5000 Н/м. Находим пределы интегрирования: a = 0,22 – 0,2 = 0,02 (м), b = 0,32 – 0,2 = 0,12 (м). Теперь по формуле (2) получим:

$$A = \int_{0,02}^{0,12} 5000dx = 5000\frac{x^2}{2}\Big|_{0,02}^{0,12} = 2500(0{,}0144 - 0{,}0004) = 2500 * 0{,}014 = 35\ (\text{Дж}).$$

Ответ: А =35Дж.

9.3. Задачи о силе давления жидкости

Согласно закону Паскаля, величина Р давления жидкости на горизонтальную площадку вычисляется по формуле:

$P = gphS$, (4), где g – ускорение свободного падения в м/с^2;

р – плотность жидкости в кг/м^3;

h – глубина погружения площадки в м;

S – площадь площадки в м^2;

Сила давления жидкости на вертикальную пластину вычисляется по формуле: $P = g\int_a^b pxf(x)dx$.

Пример 7

Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найдем силу давления воды (плотность воды 1000 кг/м^3), наполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м×0,7 м.

Решение:

Стенка имеет форму прямоугольника, поэтому $f(x)$ = 0,7x, где $x \in [0;\ 0{,}4]$, поэтому пределы интегрирования a = 0 и b = 0,4.

Для нахождения силы давления воды на стену воспользуемся формулой:

$$P = g\int_0^{0,4} 1000 \cdot 0{,}7 \cdot xdx = 700\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,4} = 56g \approx 549\text{Н},$$

g = 9,8 м/с^2 ускорение свободного падения.

Ответ: Р≈ 549 Н.

9.4. Задачи экономического характера

Пример 8

Экспериментально установлено, что продуктивность труда работника приближенно выражается формулой: $f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96$, где t – рабочее время в часах. Вычислите объем выпуска продукции за квартал, считая рабочий день восьмичасовым, а количество рабочих дней в квартале – 62.

Решение:

Объем выпуска продукции в течение смены является первообразной для функции, выражающей продуктивность труда. Поэтому $V = \int_0^8 f(t)dt$.

В течение квартала объем выпуска продукции составит:

$$V = 62\int_0^8 f(t)dt = 62\int_0^8 (0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96)dt = 62(-0{,}0033\frac{t^3}{3} - 0{,}089\frac{t^2}{2} + 20{,}89t)\Big|_0^8 =$$

$= 62(-0{,}001 \cdot 512 - 2{,}848 + 167{,}68) = 62 \cdot 164{,}27 \approx 10185$ *(ед.)*.

Ответ: 10185 ед.

Пример 9

Экспериментально установлено, что зависимость расхода бензина автомобиля от скорости на 100 км пути выражается по формуле: $Q = 18 - 0{,}3v + 0{,}003v^2$, где $30 \le v \le 110$. Определить средний расход бензина, если скорость движения 50–60 км/час.

Решение.

Средний расход бензина составляет:

$$m = \frac{\int_{50}^{60}(18 - 0{,}3v + 0{,}003v^2)dv}{60-50} = \frac{(18v - 0{,}3\frac{v^2}{2} + 0{,}003\frac{v^3}{3})\Big|_{50}^{60}}{10} =$$

$$= \frac{1}{10}(18 \cdot 60 - 0{,}3 \cdot 1800 + 0{,}003 \cdot 72000 - 18 \cdot 50 + 0{,}3 \cdot 1250 - 0{,}003 \cdot 41667) =$$

$$= \frac{1}{10}(1080 - 540 + 216 - 900 + 375 - 125) = 10{,}6 \text{ (л)}.$$

Ответ: 10,6 л.

9.5. Задания для самостоятельного решения

Решите задачи:

1. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $= 9t^2 - 2t - 8$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за 3 секунды от начала движения.

2. Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1=(2t^2+4t)$ м/с, м/с, второе – со скоростью $v_2 = (3t + 2)$ м/с, м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10 с?

3. Силу упругости F пружины, растянутой 1_1 = 0,02 м, равна 2Н. Какую работу надо провести, чтобы растянуть пружину на 1_2 = 0,05 м?

4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для ее сжатия на 0,01 нужна сила 10 Н.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богомолов Н.В. Сборник задач по математике для студентов СПО. – М.: Дрофа, 2009.

2. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. Элементы высшей математики. – М.: ACADEMIA, 2008.

3. Зайцев И.Л. Курс высшей математики (для техникумов). – М.: Высшая школа, 1952.

4. Дюженкова А.И., Носаль Т.В. Высшая математика (практикум). – Киев: Высшая школа, 1991.

5. Маркович Э.С. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1972.

6. Цыпкин А.Г. Справочник по математике для средних учебных заведений. – М.: Наука, 1988.

7. Алгебра и начала анализа (математика для техникумов). Ч. 1, 2 /под ред. Г.Н. Яковлева. – М.: Наука, 1981.

СОДЕРЖАНИЕ